

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ  
И.о. заведующего кафедрой  
математического анализа  
Шабров С.А.



01.07.2021

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.08 Математический анализ**

- 1. Шифр и наименование направления подготовки:**  
02.03.01 Математика и компьютерные науки
- 2. Профиль подготовки:** Математические методы и компьютерные технологии в естествознании, экономике и управлении, Математическое и компьютерное моделирование
- 3. Квалификация (степень) выпускника:** Бакалавр
- 4. Форма обучения:** Очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** Кафедра математического анализа
- 6. Составители программы:**  
Плетнева Ольга Константиновна, к.п.н., доцент
- 7. Рекомендована:** Научно-методическим Советом математического факультета, протокол №0500-07 от 29.06.2021
- 8. Учебный год:** 2021/2022  
2022/2023

**Семестр(-ы):** 1, 2, 3, 4

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

### *Цели изучения дисциплины:*

- обучение основам математического анализа для формирования у студентов представления о математике как особом методе познания природы, осознания общности математических понятий и моделей, приобретения навыков логического мышления и оперирования абстрактными математическими объектами;

- воспитание высокой математической культуры;

- закладка фундамента математического образования.

### *Задачи дисциплины:*

- развить умение самостоятельной работы с учебными пособиями и другой научной и математической литературой;

- ознакомить студентов с основными математическими понятиями и методами дифференциального и интегрального исчисления функции одной и многих переменных, формулировками и доказательствами наиболее важных как с теоретической, так и с практической точки зрения теорем данного курса;

- привить навыки решения основных типов задач по разделам дисциплины; выработать у студентов навыки применения полученных теоретических знаний для решения прикладных задач;

- привить точность и обстоятельность аргументации в математических и других научных рассуждениях;

- сформировать высокий уровень математической культуры, достаточный для понимания и усвоения последующих курсов;

- способствовать: подготовке к ведению исследовательской деятельности в областях, использующих математические методы; созданию и использованию математических моделей процессов и объектов; разработке эффективных математических методов решения задач естествознания, техники, экономики и управления.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Дисциплина «Математический анализ» относится к обязательной части Блока 1 основной профессиональной образовательной программы направления подготовки 02.03.01 – Математика и компьютерные науки – Бакалавр.

Дисциплина «Математический анализ» базируется на знаниях, полученных в рамках школьного курса «Математика» или соответствующих математических дисциплин среднего профессионального образования, использующих соответствующие количественные методы. Приобретенные в результате обучения знания, умения и навыки используются во всех без исключения математических и естественнонаучных дисциплинах, модулях и практиках.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знать: основные термины и положения математического анализа, методы самоконтроля и приобретения новых навыков. Уметь: абстрактно мыслить,

	математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.2	Умеет использовать их в профессиональной деятельности	анализировать, производить синтез, самостоятельно применять методы и средства познания, обучения и самоконтроля для приобретения новых знаний и умений, в том числе в новых областях, непосредственно не связанных со сферой деятельности, развития социальных и профессиональных компетенций, изменения вида своей профессиональной деятельности.  Владеть (иметь навык(и)): приемами применения основных математических понятий и методов решения задач математического анализа при решении профессиональных задач.
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 27/972.**

**Форма промежуточной аттестации** зачеты, экзамены.

**13. Трудоемкость по видам учебной работы:**

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)				
	Всего	По семестрам			
		1 сем.	2 сем.	3 сем.	4 сем.
Контактная работа	508	136	136	100	136
в том числе: лекции	254	68	68	50	68
практические	254	68	68	50	68
лабораторные					
курсовая работа					
Самостоятельная работа	320	80	80	80	80
Промежуточная аттестация	144	36	36	36	36
Итого:	972	252	252	216	252

### 13.1. Содержание дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК
1. Лекции			
1.1	Введение. Элементы логики и теории множеств		-
1.2	Вещественные числа	Множество $\mathbb{R}^1$ . Аксиомы поля. Свойство непрерывности вещественной прямой. Аксиомы Архимеда, Кантора. Теорема о вложенных отрезках. Окрестность точки. Предельная точка множества, её свойство. Теорема Больцано. Мощность множества. Счётные множества, континуальные множества, их свойства. Счётность множества рациональных чисел. Континуальность множества $[0,1]$ . Ограниченность множества. Верхние и нижние границы множества. Точные верхние и нижние границы, их свойства. Теорема о существовании и единственности точных границ множества.	-
1.3	Отображения, функции	Отображения, функции. Классификация функций. Последовательности.	-
1.4	Предел последовательности	Предел последовательности. Теоремы о пределах: о единственности предела; о пределе постоянной; о переходе к пределу в равенствах, об ограниченности сходящейся последовательности. Подпоследовательность. Принцип Больцано-Вейерштрасса. Частичный предел. Верхний и нижний пределы последовательности, их свойства. Условие Коши. Критерий Коши существования предела последовательности. Предел монотонной последовательности.	-
1.5	Теория пределов функции	Предел функции. Предел функции по множеству. Односторонние пределы. Предел по Гейне. Связь между существованием предела функции и существованием предела по множествам; по Гейне, односторонних пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Теорема о представлении функции, имеющей конечный предел. Теоремы о пределах: о единственности предела; о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел и. О свойствах пределов, связанных с неравенствами; об арифметиче-	-

		ских свойствах пределов; о пределе промежуточной функции. Условие Коши. Критерий Коши существования предела функции. О пределах монотонной функции Первый и второй замечательные пределы. Вычисление пределов с использованием компьютерных технологий.	
1.6	Непрерывность функции	Непрерывность функции в точке, на множестве, односторонняя непрерывность. Точки разрыва, их классификация. Равномерная непрерывность. Арифметические свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на отрезке: теорема Вейерштрасса. Теорема Кантора. Теорема Коши о промежуточных значениях функций. Следствия. Обратные функции, их существование и непрерывность. Непрерывность основных элементарных функций и элементарных функций. Замечательные пределы. Сравнение функций.	-
1.7	Производная и дифференциал	Производная. Непрерывность функции, имеющей производную. Геометрический и физический смысл производной. Арифметические свойства производной. Производная обратной функции. Производная сложной функции. Производные гиперболических функций. Таблица производных. Логарифмическая производная. Производная функции, заданной параметрически. Дифференциал. Связь между существованием дифференциала и производной. Арифметические свойства дифференциала. Таблица дифференциалов. Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы 1-го дифференциала. Производные высших порядков. Производные высшего порядка от суммы и произведения двух функций. Дифференциалы высшего порядка сложной функции. Инвариантность формы дифференциалов высшего порядка. Теоремы о дифференцируемых функциях (т.т. Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши). Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей. Формула Тейлора. Исследование функций с помощью производных: на монотонность, на экстремум. Исследование функций на выпуклость. Нахождение точек перегиба графика функции. Нахождение асимптот функции. Общая схема исследования функций и построение эскиза графика функции.	-
1.8	Неопределенный интеграл	Первообразная и неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла. Таблица интегралов. Замена пе-	-

		ременной. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простых дробей. Метод неопределённых коэффициентов. Метод Остроградского. Интегрирование иррациональных функций. Подстановки Эйлера. Интегрирование дифференциального бинома. Интегрирование тригонометрических функций. Неберущиеся интегралы. Вычисление интегралов с помощью компьютерных технологий.	
1.9	Определенный интеграл Римана	Определение определённого интеграла. Примеры вычисления. Ограниченность интегрируемой функции. Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства. Условия существования определённого интеграла. Класс интегрируемых функций. Свойства определённого интеграла. Определённый интеграл с переменным верхним пределом. Его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле. Приложения определённого интеграла. Мера плоских множеств. Свойства меры. Вычисление площадей плоских фигур. Длина дуги. Нахождение длины дуги кривой. Вычисление объёма тела вращения, площади поверхности вращения. Работа силы. Нахождение работы силы. Вычисление массы дуги кривой. Статические моменты. Нахождение координат центра тяжести дуги кривой. Приближенное вычисление определённого интеграла. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.	-
1.10	Несобственные интегралы	Несобственный интеграл от неограниченной функции. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку. Использование компьютера для вычисления несобственных интегралов.	-
1.11	Функция многих переменных	Пространство $R^n$ . Метрика. Норма элемента. Окрестность точки. Последовательность. Предел последовательности. Эквивалентность сходимости последовательности по координатной сходимости. Свойства сходящихся последовательностей. Подпоследовательность. Принцип Больцано-Вейерштрасса. $f: R^n \rightarrow R^1$ . Предел. Предел по множеству. Свойства пределов. Повторные пределы, условия их равенства. Предел по Гейне. Непрерывность $f: R^n \rightarrow R^1$ . Свойства непрерывных функций. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций нескольких переменных. Равномерная непрерывность. Теоремы Вейерштрасса, Коши,	-

		<p>Кантора. Дифференцируемость <math>f: R^n \rightarrow R^1</math> (по Фреше). Производная (Фреше). Свойства дифференциалов и производных. Частные производные <math>f: R^n \rightarrow R^1</math>. Связь между дифференцируемостью функции и существованием частных производных. Вид производной и дифференциала (Фреше). Производная по направлению. Градиент. Дифференциал Гато, производная Гато. Связь между дифференцируемостью по Фреше и по Гато. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциалы высшего порядка. Частные производные высшего порядка. Условия равенства смешанных производных. Формулы для вычисления дифференциалов и производных высшего порядка от сложной функции. Неинвариантность формы 2-го дифференциала. Формула Тейлора для <math>f: R^n \rightarrow R^1</math>. Экстремум функции нескольких переменных. Отображение <math>f: R^n \rightarrow R^m</math>. Предел. Непрерывность. Дифференциал и производная (Фреше). Их свойства. Дифференциал и производная (Гато). Их свойства. Неявные функции. Существование неявных отображений <math>f: R^1 \rightarrow R^1</math>. Существование неявных отображений <math>f: R^n \rightarrow R^1</math>, <math>f: R^n \rightarrow R^m</math>. Свойства непрерывных отображений <math>f: R^n \rightarrow R^m</math>. Свойства матриц Якоби и якобианов отображений. Отображение с не равным нулю якобианом. Существование обратного отображения. Условный экстремум.</p>	
1.12	Ряды, функциональные последовательности. Бесконечные произведения	<p>Числовые ряды. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости ряда. Критерий Коши. Признаки сходимости знакоположительных рядов. Абсолютно сходящиеся ряды. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Неабсолютно сходящиеся ряды. Теорема Римана. Признаки Дирихле, Абеля. Умножение рядов. Функциональные последовательности. Сходимость поточечная, равномерная. Признаки равномерной сходимости. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость предельной функции. Функциональные ряды. Сходимость поточечная, равномерная. Признаки равномерной сходимости. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость суммы функционального ряда. Степенные ряды. Теорема Абеля. Нахождение радиуса сходимости степенного ряда. Дифференцируемость и интегрируемость суммы ряда. Аналитические функции. Ряд Тейлора. Разложение функций</p>	-

		в ряд Тейлора. Формулы Эйлера. Бесконечные произведения. Необходимый признак сходимости. Связь с рядами. Абсолютная сходимость. Использование компьютера для разложения функции в ряд.	
1.13	Ряды Фурье и преобразование Фурье	Ряды Фурье. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве. Ряд Фурье по элементам ортонормированной системы. Неравенство Бесселя. Замкнутые и полные ортонормированные системы. Равенство Парсевала. Тригонометрический ряд Фурье. Стремление коэффициентов Фурье к нулю. Интеграл Дирихле. Принцип локализации. Поточечная сходимость ряда Фурье. Теорема Вейерштрасса. Теорема Дирихле. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда Фурье. Частные виды рядов Фурье. Комплексная запись ряда Фурье. Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье.	-
1.14	Интегралы, зависящие от параметра	Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость, её признаки. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Интегралы Эйлера, их свойства. Вычисление интегралов с помощью интегралов, зависящих от параметра.	-
1.15	Интегрирование функции нескольких переменных	Двойной интеграл. Условия существования. Свойства двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных в двойном интеграле. Геометрические и механические приложения двойных интегралов. Тройной интеграл. Условия существования. Свойства. Сведение к повторному интегралу. Замена переменных в тройном интеграле. Геометрические и механические приложения тройного интеграла. n-кратный интеграл. Свойства. Сведение его к повторному. Замена переменных. Несобственные кратные интегралы. Способы задания кривых на плоскости и в пространстве. Касательная и нормаль. Криволинейный интеграл 1-го рода. Связь с римановским интегралом. Свойства криволинейного интеграла 1-го рода. Приложения. Криволинейные интегралы 2-го рода. Связь с криволинейным интегралом 1-го рода, с римановским интегралом. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования. Случаи	-



		наличия особых точек. Приложения криволинейного интеграла 2-го рода. Поверхность в трёхмерном пространстве. Касательная плоскость, нормаль к поверхности. Поверхностный интеграл 1-го рода. Сведение его к римановскому интегралу. Свойства и приложения поверхностного интеграла 1-го рода. Ориентация поверхности. Односторонние и двусторонние поверхности. Поверхностные интегралы 2-го рода. Связь их с римановскими интегралами. Свойства. Формула Остроградского-Гаусса. Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса в векторной форме. Формула Стокса. Основные операции теории поля. Соленоидное поле. Потенциальное поле.	
2. Практические занятия			
1.1	Введение.	Метод математической индукции. Свойства модуля	-
1.2	Вещественные числа	Множество $\mathbb{R}^1$ . Мощность множества. Счётные множества, континуальные множества. Верхние и нижние границы множества. Точные верхние и нижние границы, их свойства.	-
1.3	Отображения, функции	Построение эскизов графиков функций.	-
1.4	Предел последовательности	Предел последовательности. Различные приемы вычисления пределов. Подпоследовательность. Частичный предел. Верхний и нижний пределы последовательности. Критерий Коши существования предела последовательности.	-
1.5	Теория пределов функции	Предел функции. Вычисление пределов. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Представление функции, имеющей конечный предел. Свойства пределов, связанные с неравенствами; арифметические свойства пределов. Первый и второй замечательные пределы. Вычисление пределов с использованием компьютерных технологий.	-
1.6	Непрерывность функции	Непрерывность функции в точке, на множестве, односторонняя непрерывность. Точки разрыва, их классификация. Равномерная непрерывность. Замечательные пределы. Сравнение функций.	-
1.7	Производная и дифференциал	Производная. Геометрический и физический смысл производной. Арифметические свойства производной. Производная обратной функции. Производная сложной функции. Производные гиперболических функций. Логарифмическая производная. Производная функции, заданной параметрически. Дифференциал. Дифференциал сложной функции. Производ-	-

		ные высших порядков. Дифференциалы высшего порядка сложной функции. Формула Тейлора. Исследование функций с помощью производных: на монотонность, на экстремум. Исследование функций на выпуклость. Нахождение точек перегиба графика функции. Нахождение асимптот функции. Общая схема исследования функций и построение эскиза графика функции.	
1.8	Неопределенный интеграл	Первообразная и неопределённый интеграл. Таблица интегралов. Замена переменной. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простых дробей. Метод неопределённых коэффициентов. Метод Остроградского. Интегрирование иррациональных функций. Подстановки Эйлера. Интегрирование дифференциального бинома. Интегрирование тригонометрических функций. Вычисление интегралов с помощью компьютерных технологий.	-
1.9	Определенный интеграл Римана	Вычисление определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле. Вычисление площадей плоских фигур. Нахождение длины дуги кривой. Вычисление объёма тела вращения, площади поверхности вращения. Нахождение работы силы. Вычисление массы дуги кривой. Статические моменты. Нахождение координат центра тяжести дуги кривой. Приближённое вычисление определённого интеграла. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.	-
1.10	Несобственные интегралы	Несобственный интеграл от неограниченной функции. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку. Использование компьютера для вычисления несобственных интегралов.	-
1.11	Функция многих переменных	Пространство $R^n$ . Предел последовательности. $f:R^n \rightarrow R^1$ . Предел. Предел по множеству. Свойства пределов. Повторные пределы. Непрерывность $f:R^n \rightarrow R^1$ . Свойства непрерывных функций. Равномерная непрерывность. Частные производные $f:R^n \rightarrow R^1$ . Производная по направлению. Градиент. Дифференциал сложной функции. Дифференциалы высшего порядка. Частные производные высшего порядка. Формулы для вычисления дифференциалов и производных высшего порядка от сложной функции. Формула Тейлора для $f:R^n \rightarrow R^1$ . Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум.	-

1.12	Ряды, функциональные последовательности. Бесконечные произведения	Числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда. Признаки сходимости знакоположительных рядов. Абсолютно сходящиеся ряды. Признаки Дирихле, Абеля. Функциональные последовательности. Признаки равномерной сходимости. Функциональные ряды. Степенные ряды. Нахождение радиуса сходимости степенного ряда. Разложение функций в ряд Тейлора. Формулы Эйлера. Использование компьютера для разложения функции в ряд.	-
1.13	Ряды Фурье и преобразование Фурье	Ряды Фурье. Частные виды рядов Фурье. Комплексная запись ряда Фурье. Преобразование Фурье.	-
1.14	Интегралы, зависящие от параметра	Собственные интегралы, зависящие от параметра. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость, её признаки. Интегралы Эйлера, их свойства. Вычисление интегралов с помощью интегралов, зависящих от параметра.	-
1.15	Интегрирование функции нескольких переменных	Двойной интеграл. Сведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных в двойном интеграле. Геометрические и механические приложения двойных интегралов. Сведение к повторному интегралу. Замена переменных в тройном интеграле. Геометрические и механические приложения тройного интеграла. Несобственные кратные интегралы. Криволинейный интеграл 1-го рода. Связь с римановским интегралом. Свойства криволинейного интеграла 1-го рода. Приложения. Криволинейные интегралы 2-го рода. Связь с криволинейным интегралом 1-го рода, с римановским интегралом. Формула Грина. Приложения криволинейного интеграла 2-го рода. Поверхностный интеграл 1-го рода. Сведение его к римановскому интегралу. Свойства и приложения поверхностного интеграла 1-го рода. Поверхностные интегралы 2-го рода. Связь их с римановскими интегралами. Формула Остроградского-Гаусса. Формула Стокса. Основные операции теории поля.	-

**13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий:**

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
01	Введение. Элементы логики и теории множеств	4	4		10	18
02	Вещественные числа	8	6		10	24
03	Отображения, функции	4	8		10	22
04	Предел последовательности	14	14		16	44
05	Теория пределов функции	12	12		10	34
06	Непрерывность функции	12	10		10	32
07	Производная и дифференциал	24	30		26	80
08	Неопределенный интеграл	12	30		20	62
09	Определенный интеграл Римана	24	20		30	74
10	Несобственные интегралы	6	10		18	34
11	Функция многих переменных	32	26		36	94
12	Ряды, функциональные последовательности. Бесконечные произведения	26	20		26	72
13	Ряды Фурье и преобразование Фурье	18	16		20	54
14	Интегралы, зависящие от параметра	16	16		20	52
15	Интегрирование функции нескольких переменных	38	36		58	132
Итого		254	254		320	828

**14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:***Методические указания к лекционным занятиям*

В ходе лекционных занятий необходимо вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

*Методические рекомендации студентам к практическим занятиям*

Важной составной частью учебного процесса в вузе являются практические занятия. Практические занятия требуют помимо знаний теоретического материала еще и навыков решения практических задач, и помогают студентам глубже усвоить учебный материал, приобрести практические навыки и навыки творческой работы над учебной и научной литературой.

В начале практического занятия происходит обсуждение задач, решенных студентами самостоятельно дома. Это возможность для студентов еще раз обратить внимание на не понятные до сих пор моменты и окончательно разобрать их.

Преподаватель может (выборочно) проверить записи с самостоятельно решенными задачами.

Затем начинается опрос по теме, обозначенной для данного практического занятия. В процессе этого опроса студенты под руководством преподавателя более глубоко осмысливают теоретические положения по теме занятия.

На практическом занятии каждый его участник должен быть готовым к ответам на все теоретические вопросы, поставленные в плане, проявлять максимальную активность при их рассмотрении. Ответы должны строиться свободно, убедительно и аргументировано. Преподаватель следит, чтобы ответы были точными, логично построенными и не сводилось к чтению конспекта. Необходимо, чтобы выступающий проявлял глубокое понимание того, о чем он говорит, сопоставлял теоретические знания (определений, теорем, утверждений и т.д.) с их практическим применением для решения задач, был способен привести конкретные примеры тех математических объектов и положений, о которых рассуждает теоретически.

В ходе обсуждения теоретического материала могут разгореться споры, дискуссии, к участию в которых должен стремиться каждый. Преподавателю необходимо внимательно и критически слушать, подмечать особенное в суждениях студентов, улавливать недостатки и ошибки, корректировать их знания, и, если нужно, выступить в роли рефери. При этом обратить внимание на то, что еще не было сказано, или поддержать и развить интересную мысль, высказанную выступающим студентом.

В заключение опроса преподаватель, еще раз кратко резюмирует теоретический материал, необходимый для решения задач. Также преподаватель может (выборочно) проверить конспекты студентов и, если потребуется, внести в них исправления и дополнения,

Затем приступают к решению практических задач, используя изученные теоретические положения.

Планы практических занятий, их тематика, рекомендуемая литература, цель и задачи ее изучения сообщаются преподавателем на вводных занятиях или в методических указаниях по данной дисциплине.

#### **15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины:**

*(список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов литературы)*

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды: Учебник [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2015. — 444 с. — Режим доступа: <a href="https://e.lanbook.com/book/71994">https://e.lanbook.com/book/71994</a> .
2	Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 1 [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 448 с. — Режим доступа: <a href="https://e.lanbook.com/book/65055">https://e.lanbook.com/book/65055</a> .
3	Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 624 с. — Режим доступа: <a href="https://e.lanbook.com/book/92629">https://e.lanbook.com/book/92629</a> .

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1.	<i>Ильин В.А. Математический анализ / В.А.Ильин, В.А.Садовничий,</i>

	<i>Б.И.Сендов. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – Часть 1. – 616 с.</i>
2.	<i>Ильин В.А. Математический анализ / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Б.И.Сендов. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – Часть 2. – 357 с.</i>
3.	<i>Будаев, Виктор Дмитриевич. Математический анализ : учебник / В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон ; В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон .— Москва : Лань, 2012 .— 544 с. : ил. ; 22 см. — Допущено Учебно-методическим объединением по направлениям педагогического образованию Министерства образования и науки РФ в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 050200 — «Физико-математическое образование». — Предм. указ.: с. 532-536 .— Имен. указ.: с. 537 .— Библиогр.: с. 531 .— ISBN 978-5-8114-1186-3 .— &lt;URL:<a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=3173">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=3173</a>&gt;.</i>
4.	<i>Карташев, Алексей Павлович. Математический анализ : / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский .— Москва : Лань, 2007 .— 447 с. : ил. ; 21 см .— (Лучшие классические учебники. Математика) (Классическая учебная литература по математике) (Учебники для вузов. Специальная литература) .— .— ISBN 978-5-8114-0700-2 .— &lt;URL:<a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=178">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=178</a>&gt;.</i>
5.	<i>Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения : / И. А. Соловьев, В. В. Шевелев, А. В. Червяков, А. Ю. Репин .— Москва : Лань, 2009 .— 319 с. : ил. ; 21 см .— (Учебники для вузов. Специальная литература) .— .— Библиогр.: с. 316 .— ISBN 978-5-8114-0751-4 .— &lt;URL:<a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=374">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=374</a>&gt;.</i>
6.	<i>Никольский С.М. Курс математического анализа /С.М.Никольский. – М.: Наука, 1990. – Т.1. – 528 с.</i>
7.	<i>Никольский С.М. Курс математического анализа /С.М.Никольский. – М.: Наука, 1990. – Т.2. – 543 с.</i>
8.	<i>Шилов Г.К. Математический анализ (функции одного переменного) /Г.К.Шилов. – М.:Наука, 1969. - 528 с.</i>
9.	<i>Соболев В.И. Краткий курс математического анализа / В.И. Соболев, В.В.Покорный, В.И.Аносов. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1984. – Часть 1. – 392 с.</i>
10.	<i>Соболев В.И. Краткий курс математического анализа / В.И. Соболев, В.В.Покорный, В.И.Аносов. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1984. – Часть 2. – 346 с.</i>
11.	<i>Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу / Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. – М.: Физматлит, 2003. – Т.2. – 504с.</i>
12.	<i>Математический анализ-1. Метод математической индукции. Точные границы числовых множеств: учебно-методическое пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; сот. С.П.Зубова, О.К. Плетнева, Е.В. Раецкая – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2007. – 18 с.</i>
13.	<i>Математический анализ-2. Построение графиков функций: учебно-методическое пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; сот. С.П.Зубова, О.К. Плетнева, Е.В. Раецкая – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009. – 26 с.</i>

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
1.	<i>Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – (<a href="http://www.lib.vsu.ru/">http // www.lib.vsu.ru/</a>)</i>
2.	<i><a href="http://www.math.vsu.ru">http://www.math.vsu.ru</a> – официальный сайт математического факультета ВГУ</i>
3.	<i>Google, Yandex, Rambler</i>

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:

Курс дисциплины построен таким образом, чтобы позволить студентам максимально проявить способность к самостоятельной работе. Для успешной самостоятельной работы предполагается тесный контакт с преподавателем.

Изучение дисциплины следует начинать с проработки настоящей рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.

Студентам рекомендуется получить в библиотеке учебную литературу по дисциплине, необходимую для эффективной работы на всех видах аудиторных занятий, а также для самостоятельной работы по изучению дисциплины.

Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы при написании курсовых и дипломных работ.

Успешное освоение курса предполагает активное, творческое участие студента путем планомерной, повседневной работы.

#### **17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)**

Осуществляется интерактивная связь с преподавателем через сеть интернет, проводятся индивидуальные онлайн консультации.

Доклады осуществляются с использованием презентационного оборудования.

#### **18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, соответствующие действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Для самостоятельной работы используются классы с компьютерной техникой, оснащенные необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

### 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций:

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Введение. Элементы логики и теории множеств	ОПК-1	ОПК-1.1	Устный опрос
2.	Вещественные числа	ОПК-1	ОПК-1.1	Устный опрос
3.	Отображения, функции	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.1 ОПК-1.1	Устный опрос
4.	Предел последовательности	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.1 ОПК-1.1	Контрольная работа №1.1
5.	Теория пределов функции	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.1 ОПК-1.1	Контрольная работа №1.1
6.	Непрерывность функции	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.1 ОПК-1.1	Контрольная работа №1.1
7.	Производная и дифференциал	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.1 ОПК-1.1	Контрольная работа №1.2
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет, экзамен				Контрольные работы КИМы к экзамену

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Неопределенный интеграл	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.1 ОПК-1.1	Контрольная работа №2.1
2.	Определенный интеграл Римана	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.1 ОПК-1.1	Контрольная работа №2.2
3.	Несобственные интегралы	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.1 ОПК-1.1	Контрольная работа №2.2
4.	Функция многих переменных	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.1 ОПК-1.1	Индивидуальные задания



№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
Промежуточная аттестация форма контроля - зачет				Контрольные работы КИМы к экзамену

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Функция многих переменных	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.1 ОПК-1.1	Контрольная работа №3.1
2.	Ряды, функциональные последовательности. Бесконечные произведения	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.1 ОПК-1.1	Контрольная работа №3.2
3.	Ряды Фурье и преобразование Фурье	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.1 ОПК-1.1	Контрольная работа №3.2
Промежуточная аттестация форма контроля - зачет				Контрольные работы КИМы к экзамену

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Интегралы, зависящие от параметра	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.1 ОПК-1.1	Контрольная работа №4.1
2.	Интегрирование функции нескольких переменных	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.1 ОПК-1.1	Контрольная работа №4.2
Промежуточная аттестация форма контроля - зачет				Контрольные работы КИМы к экзамену

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

#### Образцы контрольных работ Семестр №1

##### Контрольная работа №1.1

###### Вариант 1

Задание 1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  (указать  $N(\varepsilon)$ ), если  $a_n = \frac{2n^3}{n^3 - 2}$ ,  $a = 2$ .

Задание 2. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности  $x_n = \frac{2+n}{n}$ .

Задание 3. Вычислить предел последовательности:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[3]{5n^2 + 4} \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7 - n + n^2}}$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}(n-1)(n+2)n}{(n-3)^3}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n + (n-1)!}{n^3 + n!}$

###### Вариант 2

Задание 1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  (указать  $N(\varepsilon)$ ), если  $a_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}$ ,  $a = -\frac{3}{5}$ .

Задание 2. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности  $x_n = \frac{3n}{1-n}$ .

Задание 3. Вычислить предел последовательности:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[4]{3n+1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n + \sqrt[3]{n}) \sqrt{5 - n + n^2}}$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 - 1} - \sqrt{2n^2 + 1}}{n+1}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n 6^n + 5^{n+1}}{5^n - 6^{n+1}}$

## Контрольная работа №1.2

### Вариант 1

Задание 1. Сформулировать с помощью неравенств утверждение:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty.$$

Задание 2. Вычислить пределы:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(3x^2+1)}}$
$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x-1} \right)^{x+7}$

Задание 3. Найти точки разрыва функции  $y = \frac{x^4 - 1}{1 - \sqrt{x}}$  и определить их род.

Задание 4. Используя определение, доказать, что функция  $y = x^2$  является равномерно непрерывной на промежутке  $(0; 2)$ .

### Вариант 2

Задание 1. Сформулировать с помощью неравенств утверждение:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +a.$$

Задание 2. Вычислить предел последовательности:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x\sqrt{x^4 + 1}}$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 3\pi x}{\cos \frac{\pi}{2x}}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-5}{2x+1} \right)^{x-1}$

Задание 3. Найти точки разрыва функции  $y = \frac{2x^2 + x - 1}{|x+1|}$  и определить их род.

Задание 4. Используя определение, доказать, что функция  $y = \sqrt{x+1}$  является равномерно непрерывной на промежутке  $(3; 8)$ .

## Семестр №2

### Контрольная работа №2.1

#### Вариант 1

Задание 1. Вычислить:  $\int (4 - 3x)e^{-3x} dx$ .

Задание 2. Вычислить:  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ .

Задание 3. Вычислить:  $\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx$ .

Задание 4. Вычислить:  $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^4\sqrt{x^3}} dx$ .

Задание 5. Вычислить:  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx$ .

Задание 6. Вычислить:  $\int x^3(1-5x^2)^{10} dx$

### Вариант 2

Задание 1. Вычислить:  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} dx$ .

Задание 2. Вычислить:  $\int \frac{1+\ln x}{x} dx$ .

Задание 3. Вычислить:  $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1} dx$ .

Задание 4. Вычислить:  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3\sqrt{x^2}} dx$ .

Задание 5. Вычислить:  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx$ .

Задание 6. Вычислить:  $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$ .

## Контрольная работа №2.2

### Вариант 1

Задание 1. Вычислить интегралы:  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ ,  $\int_1^3 x \ln x dx$ .

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $x = 6$ ,  $y = 7 - x$ .

Задание 3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  кривой  $y = \sqrt{x}e^{-x}$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ .

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярных координатах:  $r = \sin 3\varphi$ .

### Вариант 2

Задание 1. Вычислить интегралы:  $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$ ,  $\int_{\pi}^0 x \cdot \cos x dx$ .

Задание 2. Вычислить площади фигуры, ограниченной линиями:  
 $x^2 = 9y$ ,  $x = 3y - 6$ .

Задание 3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  кривой  $y = 3x^2$ ,  $y = 3|x|$ .

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярных координатах:  $r = \cos 2\varphi$ .

### Семестр №3

#### Контрольная работа №3.1

##### Вариант 1

Задание 1. Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  если а)  $z = 2^{xy} + \sin(2xy)$ .

$$\text{б) } z = \operatorname{tg} \frac{x}{y} \cdot \sin \frac{y}{x}.$$

Задание 2. Показать, что  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  для функции  $z = \ln(x^2 + y)$ .

Задание 3. Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 + y^2 - 6x + 8y - 2$ .

Задание 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$  в треугольнике со сторонами  $y = x + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$ .

##### Вариант 2

Задание 1. Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  если а)  $z = \ln \sin(x^2 + y)$ .

$$\text{б) } z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Задание 2. Показать, что  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  для функции  $z = \sqrt{2xy + y^2}$ .

Задание 3. Исследовать на экстремум функцию  $z = 2x - 2y - x^2 - y^2 + 6$ .

Задание 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = y^2 - 2xy - x^2 + 4x - 3$  в треугольнике со сторонами  $y = x + 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 2$ .

#### Контрольная работа №3.2

##### Вариант 1

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n}{2n+1} \right)^{2n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5 + 3n + 6}}.$$

Задание 2. Пользуясь признаком Лейбница, исследовать сходимость знакочередующегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$ .

Задание 3. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot (n+1)} \cdot (3x-1)^n$ .

Задание 4. Вычислить определенный интеграл  $\int_0^1 \cos \sqrt[3]{x} dx$  с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд.

### Вариант 2

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n+1}{n-1} \right)^{n-1}, \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{5}{\sqrt{n^3}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^7 + 4n^2 + 5}}.$$

Задание 2. Пользуясь признаком Лейбница, исследовать сходимость знакочередующегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{2n+3}}$ .

Задание 3. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n (x-1)^n}$ .

Задание 4. Вычислить определенный интеграл  $\int_0^1 x^2 \sin x^2 dx$  с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд.

## Семестр №4

### Контрольная работа №4.1

#### Вариант 1

Задание 1. Разложить в ряд Фурье с периодом  $2\pi$ , заданную на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , функцию  $f(x) = 2x + 1$ .

Задание 2. Представить периодическую функцию  $f(x) = \begin{cases} 2x; & 0 \leq x \leq 3, \\ 6; & 3 < x \leq 6; \end{cases}$  заданную на полупериоде  $[0, l]$ , рядом Фурье по синусам. Построить график функции и график суммы полученного ряда Фурье.

Задание 3. Разложить периодическую функцию  $y = \arcsin(\sin(3x))$  в ряд Фурье. Изобразить график суммы ряда.

#### Вариант 2

Задание 1. Разложить в ряд Фурье с периодом  $2\pi$ , заданную на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , функцию  $f(x) = x\pi - 1$ .

Задание 2. Представить периодическую функцию  $f(x) = \begin{cases} 2x; & 0 \leq x \leq 3, \\ 6; & 3 < x \leq 6; \end{cases}$  заданную на полупериоде  $[0, l]$ , рядом Фурье по косинусам. Построить график функции и график суммы полученного ряда Фурье.

Задание 3. Разложить периодическую функцию  $y = \text{sign}\left(\sin \frac{x}{2}\right)$  в ряд Фурье. Изобразить график суммы ряда.

### Контрольная работа №4.2

#### Вариант 1

Задание 1. Вычислить двойной интеграл  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ ,  $D$  — область, ограниченная линиями:  $x = 2$ ,  $y = x$ ,  $xy = 1$ .

Задание 2. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл  $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$ ,  $D$  — область, определяемая неравенствами:  $x^2 + y^2 \geq 1$ ,  $x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$ ,  $y \leq x\sqrt{3}$ .

Задание 3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:  $y = 0$ ,  $z = 0$ .  $3x + y = 6$ ,  $3x + 2y = 12$  и  $x + y + z = 6$ .

Задание 4. Вычислить тройной интеграл  $\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$ ,  $D$  — область, ограниченная плоскостями:  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y + z = 1$ .

Задание 5. Перейдя в тройном интеграле  $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$  к цилиндрическим или сферическим координатам, расставить пределы интегрирования, если  $D$  — область, ограниченная цилиндром  $x^2 + y^2 = 2x$ , плоскостью  $z = 0$  и параболоидом  $z = x^2 + y^2$ .

#### Вариант 2

Задание 1. Вычислить двойной интеграл  $\iint_D \cos(x + y) dx dy$ ,  $D$  — область, ограниченная линиями:  $x = 0$ ,  $y = x$ ,  $y = \pi$ .

Задание 2. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл  $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$ ,  $D$  — круг  $x^2 + y^2 \leq Rx$ .

Задание 3. Определить площадь части поверхности  $z^2 + y^2 = x^2$ , вырезанной цилиндром  $x^2 - y^2 = a^2$  и плоскостями  $y = b$  и  $y = -b$ .

Задание 4. Вычислить тройной интеграл  $\iiint_D xy dx dy dz$ ,  $D$  — область, ограниченная гиперболическим параболоидом  $z = xy$  и плоскостями  $x + y = 1$  и  $z = 0$  ( $z \geq 0$ ).

Задание 4. Перейдя в тройном интеграле  $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$  к цилиндрическим или сферическим координатам, расставить пределы интегрирования, если  $D$  — часть шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ , лежащая внутри цилиндра  $(x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2)$  ( $x \geq 0$ ).

## Образцы КИМ-ов к экзамену

### Семестр №1

#### Контрольно-измерительный материал № 1

##### Теория:

1. Логические действия. Таблицы истинности. Основные формулы логического исчисления (доказать две из них).
2. Определение предела функции по Коши и его геометрический смысл. Примеры.
3. Производная функции в точке, определение. Производная обратной функции

##### Практика:

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n^3 + 2} = 0.$$

2. Определить тип точки разрыва  $x = 0$  для функции  $y = 2^{\frac{1}{x}}$ .

3. Вычислить предел, пользуясь правилом Лопиталя:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$ .



## Контрольно-измерительный материал № 2

### Теория:

1. Основные операции над множествами. Числовые множества. Примеры.
2. Определение предела функции по Гейне. Примеры. Равносильность определений по Гейне и по Коши.
3. Дифференциал функции, определение. Дифференциал сложной функции.

### Практика:

1. Вычислить предел последовательности:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{99(n+2)(1-n)}{(n+3)^3}$ .
2. Доказать непрерывность функции  $y = \sin x$ .
3. Найти производную  $y'_x$  функции  $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-t)^2}}. \end{cases}$

## Контрольно-измерительный материал № 3

### Теория:

1. Принцип Архимеда с доказательством.
2. Односторонние пределы. Критерий существования предела функции через односторонние пределы.
3. Производная функции, определение. Производная сложной функции.

### Практика:

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+1} = \frac{1}{3}.$$

2. Показать, что функция  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$  непрерывна при  $x = 0$ .

3. Найти дифференциал функции  $y = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2x}$ .

## Семестр №2

### Контрольно-измерительный материал № 1

#### Теория:

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Лемма об отличии двух первообразных на константу. Примеры.
2. Понятие разбиения отрезка, свойства разбиений.
3. Неравенство Коши-Шварца. Следствия. Координатная запись неравенств.

#### Практика:

1. Найти интегралы  $\int \frac{3x+3}{2x^2-x-1} dx$ ,  $\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1} dx$ .
2. 1) Исследовать на сходимость интеграл  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}$ . 2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = (x-2)^3$ ,  $y = 4x-8$ .
3. 1) Найти область определения функции  $f(x, y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$ . 2) Найти частные производные функции  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ . Вычислить их значение в точке (1; 1).

### Контрольно-измерительный материал № 2

#### Теория:

1. Свойства неопределенного интеграла.
2. Определение интеграла Римана. Ограниченность интегрируемой функции. Пример ограниченной неинтегрируемой функции.
3. Пространство  $R^n$ . Метрика, расстояние, норма (определение, свойства). Понятие окрестности в  $n$ -мерном пространстве.

#### Практика:

1. Найти интегралы  $\int \frac{dx}{4\sqrt{x}-x}$ ,  $\int \frac{1}{\cos x} dx$ .
2. 1) Найти площадь области, ограниченной кривыми, заданными уравнениями  $y = xe^{-x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$ . 2) Вычислить интеграл  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x - \arctg 2x}{1+4x^2} dx$ .
3. 1) Найти линии уровня функции  $f(x, y) = \ln(1-x^2-y^2)$ . 2) Найти частные производные функции  $f(x, y, z) = x\sqrt[4]{z} + zy + \frac{y}{\sqrt[4]{x}}$ .

### Контрольно-измерительный материал № 3

#### Теория:

1. Формула замены переменной. Примеры.
2. Верхние и нижние суммы Дарбу. Их свойства (3 свойства).

3. Понятие ограниченности множества. Диаметр множества. Теорема о существовании у ограниченной последовательности сходящейся подпоследовательности.

### Практика:

1. Вычислить интегралы  $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ ,  $\int \frac{xdx}{(x+1)(x-2)^2}$ .

2. 1) Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = e^x - 1$ ,  $y = 2$ ,  $x = 0$  вокруг  $OX$ . 2) Вычислить интеграл  $\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx$ .

3. 1) Найти область определения функции  $f(x, y, z) = \ln \frac{x^2 + y^2}{z - x^2 - y^2}$ . 2) Найти частные производные функции  $f(x, y) = e^{-xy}$ . Вычислить их значение в точке  $(0; 1)$ .

## Семестр №3

### Контрольно-измерительный материал № 1

#### Теория:

1. Частные производные, дифференцируемость функции многих переменных.
2. Признаки Абеля и Дирихле сходимости рядов.
3. Сходимость функциональных последовательностей. Примеры.

#### Практика:

1. Для функции  $z = \frac{x}{y}$  показать, что  $x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

2. Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{6^n}$ .

3. Найти область сходимости функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3 (x+3)^{2n}}{2n+3}$ .

### Контрольно-измерительный материал № 2

#### Теория:

1. Частные производные высших порядков сложной функции многих переменных.
2. Теорема Римана.
3. Равномерная сходимость функциональных последовательностей. Лемма о необходимом и достаточном условии равномерной сходимости функциональных последовательностей.

### Практика:

1. Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 3y$ .
2. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ .
2. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^4 x^{2n}}{2n+1}$ .

### Контрольно-измерительный материал № 3

#### Теория:

1. Дифференциалы высших порядков функции многих переменных.
2. Условно сходящиеся ряды. Лемма о расходимости рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ .
3. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей.

#### Практика:

1. Для функции  $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  показать, что  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .
2. Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 2n}}$ .
3. Исследовать на равномерную сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$ ,  $[-5, -1]$ .

### Семестр №4

### Контрольно-измерительный материал № 1

#### Теория:

1. Тригонометрические системы Фурье. Лемма о свойствах функций тригонометрической системы.
2. Понятие объема в  $n$ -мерном пространстве.
3. Понятие поверхностного интеграла.

#### Практика:

1. Представить периодическую функцию  $f(x) = \begin{cases} 2x; & 0 \leq x \leq 3, \\ 6; & 3 < x \leq 6, \end{cases}$  заданную на полупериоде, рядом Фурье по синусам. Построить график функции и график суммы полученного ряда Фурье.

2. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле  $\int_{-1}^0 dx \int_{-8x^2}^{-2x+6} f(x, y) dy$ .

Сделать чертеж области интегрирования.

3. Вычислить поверхностный интеграл  $\iint_S (x+y+z) dS$ , где  $S$  — часть плоскости  $x+2y+4z=4$ , лежащая в первом октанте ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ).

## Контрольно-измерительный материал № 2

### Теория:

1. Теорема о коэффициентах ряда Фурье.
2. Свойства мер.
3. Поверхностный интеграл первого рода. Свойства.

### Практика:

1. Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = \frac{x}{2} - \pi$  с периодом  $2\pi$ , заданную на отрезке  $[-\pi; \pi]$ .
2. Вычислить тройной интеграл  $\iiint_D y \cos(z+x) dx dy dz$ ,  $D$  — область, ограниченная цилиндром  $y = \sqrt{x}$  и плоскостями  $x+z = \frac{\pi}{2}$ ,  $y=0$  и  $z=0$ .
3. Вычислить интеграл  $\iint_S (xy+yz+zx) dS$ , где  $S$  — часть конуса  $z = \sqrt{x^2+y^2}$  внутри поверхности  $x^2+y^2 = 2ax$ .

## Контрольно-измерительный материал № 3

### Теория:

1. Абсолютно интегрируемые функции.
2. Разбиение измеримых множеств, свойства разбиений.
3. Поверхностный интеграл первого рода. Вычисление. Выражение поверхностного интеграла через двойной.

### Практика:

1. Представить периодическую функцию  $f(x) = \begin{cases} 2x; & 0 \leq x \leq 3, \\ 6; & 3 < x \leq 6, \end{cases}$  заданную на полупериоде, рядом Фурье по синусам. Построить график функции и график суммы полученного ряда Фурье.
2. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл:  $\oint_L (xy + y + x) dx + (yx - y + x) dy$ ,  $L$  — эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

3. Вычислить интеграл  $\iint_S z^2 dS$ , где  $S$  представляет собой полную поверхность конуса  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2$ .

### Описание технологии проведения промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие показатели:

- 1) знание основных понятий математического анализа, методов и приемов решения базовых задач;
- 2) умение формулировать основные определения и теоремы курса математического анализа, решать задачи и анализировать полученные результаты;
- 3) владение математическим аппаратом для решения задач анализа и прикладных задач.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Ответ на контрольно-измерительный материал соответствует одному или более чем одному из перечисленных показателей, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует знание учебного материала, возможно с некоторыми ошибками.	Пороговый уровень и выше порогового	зачтено
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или отсутствие их.		не зачтено

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели:

- 1) знание основных определений, понятий и идей изучаемых разделов математического анализа; формулировок и доказательств основных результатов этих разделов.
- 2) умение применять полученные знания и навыки для решения задач; проводить анализ и оптимизацию полученных решений, используя определения; проводить исследования, связанные с основными понятиями.
- 3) владение современными знаниями о математическом анализе и его приложениях; методами математического анализа для решения задач, обоснования результатов расчетов и рассуждений.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных	Повышенный уровень	Отлично

исследований, применять теоретические знания для решения практических задач.		
Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания основных определений, понятий и идей изучаемого курса, знание с небольшими недочетами доказательств основных результатов. Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение использовать математический аппарат для формализации, анализа и выработки решений.	Базовый уровень	Хорошо
Неполное представление об основных определениях, понятиях и идеях изучаемого курса, незнание доказательств основных результатов. Не полностью сформированное умение использовать математический аппарат для формализации, анализа и выработки решений.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Фрагментарные знания или отсутствие знаний и умений.	-	Неудовлетворительно